Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Vektorraum-Homomorphismen**

Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (1)
Was versteht man unter einem Vektorraum-Homomorphismus und welche Typen gibt es? Wiederholen Sie erneut die beiden Axiome, welche einen Vektorraum-Homomorphismus charakterisieren und zeichnen Sie ein Diagramm, in welchem die folgenden Vektorraum-Homomorphismus-Typen in Beziehung zueinander gesetzt werden: *Homomorphismus, Monomorphismus, Epimorphismus, Isomorphismus, Endomorphismus, Automorphismus.*

Aufgabe 2 (2)
Zeigen Sie von den folgenden Abbildungen, dass es sich um Vektorraum-Homomorphismen handelt:

a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \mapsto (2x + y, 3y)$

b) $A : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ mit $(x, y) \mapsto 2(x + y)$

c) $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \bar{z}$

d) $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, 0, x_3, 0)$

e) $A : \mathrm{Abb}\,(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f \mapsto f(1)$

f) $A : \mathrm{Abb}\,(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f \mapsto d \cdot f, d \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3 (2)
Handelt es sich bei den folgenden Abbildungen um Vektorraum-Homomorphismen? Beweisen oder widerlegen Sie.

a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \mapsto (2x, y + 3)$

b) $A : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ mit $(x, y, z) \mapsto (x \cdot y, z)$

c) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto x^2 + y$

d) $A : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ mit $(x, y) \mapsto (a \cdot x + b \cdot y, c \cdot x + d \cdot y)$, $\mathbb{K}$ ein Körper und $a, b, c, d \in \mathbb{K}$

Aufgabe 4 (2)
Wir wissen bereits aus Abschnitt 1.4, dass der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ ein Spezialfall des Vektorraumes $\mathrm{Abb}\,(\Omega, \mathbb{K})$ ist. Wir können die Elemente aus V auch als unendlich lange Tupel schreiben, was folgende Notation rechtfertigt: $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(x_1, x_2, ...) : x_k \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N}\}$. Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Abbildungen um Vektorraum-Homomorphismen handelt:

a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $(x, y) \mapsto (2x + y, 0, 2x + y, 0, ...)$

b) $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $x \mapsto (x, x^2, x^3, ...)$

c) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $(x, y) \mapsto (2(x - y), 4(x - y), 8(x - y), ...)$

d) $A : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $(x_1, x_2, ...) \mapsto (x_2, x_3, ...)$

e) $A : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $(x_1, x_2, ...) \mapsto (x_1, 0, x_2, 0, ...)$

f) $A : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $(x_1, x_2, ...) \mapsto (x_1 \cdot x_2, x_3 \cdot x_4, ...)$

Aufgabe 5 (2)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Bei einer Projektion handelt es sich um einen Endomorphismus $\pi : V \to V$ mit der Eigenschaft $\pi \circ \pi = \pi$. Überprüfen Sie bei den folgenden Abbildungen, ob es sich um Projektionen handelt:

a) $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \mapsto (y, x)$

b) $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $(x, y, z) \mapsto (x, 0, z)$

c) $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x, y, z) \mapsto (x + y, z)$

d) $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \mapsto (0, 3y)$

e) $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $(x, y) \mapsto (0, y, x)$

f) $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $(x, y, z) \mapsto (x, y, z)$

Aufgabe 6 (3)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\pi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ eine Projektion. Beweisen Sie, dass sich V wie folgt zerlegen lässt:

$$V = \mathrm{Kern}\,\pi \oplus \mathrm{Bild}\,\pi$$

Tipp: Für alle $v \in V$ gilt $v = (v - \pi(v)) + \pi(v)$.

Aufgabe 7 (2)
Benutzen Sie Aufgabe 6, um die Vektorräume aus Aufgabe 5 entsprechend der daruf definierten Projektionen zu zerlegen.

Aufgabe 8 (4)
Seien V und W zwei beliebige $\mathbb{K}$-Vektorräume. Mit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ bezeichnen wir die Menge aller linearen Abbildungen $A : V \to W$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Was gilt für die Dimension von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, wenn $\dim_{\mathbb{K}} V = n \in \mathbb{N}$ und $\dim_{\mathbb{K}} W = m \in \mathbb{N}$ gilt?